数理解析研究所講究録 第2085巻 2018年 67-71

接分布とベクトル束の間の束準同型の特異点について

北海道大学電子科学研究所　土田　旭
Asahi Tsuchida
Research Center of Mathematics for Social Creativity,
Research Institute for Electronic Science,
Hokkaido University

1　はじめに

本稿では著者と佐治健太郎氏によるプレプリント [5] の一部を概説する. [5] では, 多様体 M の接分布とそれに同階数の M 上のベクトル束の間の束準同型の特異点を考え, 多様体 M の次元と接分布の階数で決まるジェネリックな特異点を示した. さらに多様体間の写像から誘導される束準同型の特異点について, 写像の特異点と接分布の関係を与えた. 本稿では束準同型のジェネリックな特異点について概説する. 証明等の詳細は [5] を参照されたい.

連接接束と呼ばれる概念が [3] において, 導入された. 連接接束とは接束からそれに同階数なベクトル束への準同型写像とある計量の組であり, 波面や同次元多様体間の写像の一般化となっている. [3] では連接接束の特異点の微分幾何的量を用いて Gauss–Bonnet 型の定理が得られており, [4] では計量を考えない接束からのある束準同型を用いて, オイラー数の公式が得られている. [5] ではこれらの先行研究を受け, 接束の代わりに階数 r, $(r < \dim M)$ の接分布を対象として研究を行ったものである.

本稿では特に断りがない限り, 多様体や写像の滑らかさは C^∞ 級とする.

2　束準同型の特異点

M を滑らかな m 次元実多様体とし, D_1 を接束 TM の接分布（部分束）で階数は $r(< m)$ とする. D_2 を M 上のベクトル束で, $\operatorname{rank} D_2 = \operatorname{rank} D_1 = r$ であるものとする. 束準同型写像

$$\varphi\colon D_1 \to D_2$$

は各点 $p \in M$ において $\varphi_p\colon D_{1p} \to D_{2p}$ は準同型写像を定めるものである．$\operatorname{rank}\varphi_p < r$ なる点 $p \in M$ を φ の**特異点**と呼ぶ．束準同型 φ の特異点集合を S とおく．すなわち $S := \{p \in M \mid \operatorname{rank}\varphi_p < r\}$ とする．特異点 $p \in S$ において $\operatorname{rank}\varphi_p = r-1$ となるとき，p を余階数 1 の特異点と呼ぶ．

補題 2.1. 点 $p \in S$ を φ の余階数 1 の特異点であるとする．このとき p の開近傍 U_p と D_1 の U_p 上の切断 η_φ が存在して，任意の $q \in S \cap U_p$ について $\varphi_q(\eta_\varphi(q)) = 0$ が成立する．

補題 2.1 で存在が保証された切断 η_φ を**零切断**とよぶ．D_1 と D_2 の局所枠について決まる φ の表現行列を M_φ とかく．M_φ について

$$\lambda_\varphi = \det M_\varphi \tag{$*$}$$

とおく．特異点 $p \in S$ について $d\lambda_\varphi(p) \neq 0$ が成り立つとき，p は**非退化**であるという．非退化な特異点は余階数 1 の特異点である．

[2] に従って，次の定義を与える．

定義 1. 非退化特異点 $p \in S$ が A_k **型特異点** $(k \leq m)$ であるとは，

- $\eta_\varphi\lambda_\varphi(p) = \cdots = \eta_\varphi^{k-1}\lambda_\varphi(p) = 0$, $\eta_\varphi^{k}\lambda_\varphi(p) \neq 0$,
- $(\lambda_\varphi, \eta_\varphi\lambda_\varphi, \ldots, \eta_\varphi^{k-1}\lambda_\varphi) : U \to \mathbb{R}^k$ は p で沈めこみ

であるときをいう．U は p のある開近傍である．

なお，A_1 型特異点は**折り目的特異点**，A_2 型特異点は**カスプ的特異点**，A_3 型特異点は**燕の尾的特異点**と呼ぶこともある．

補題 2.2. 束準同型 φ に関する A_k 的特異点の定義は D_1, D_2 の局所枠や零切断の取り方に依存しない．

A_k 型特異点 p の近傍 U において，

$$S_1 = S, \quad S_i = \{q \in U \mid \lambda_\varphi(q) = \eta_\varphi\lambda_\varphi(q) = \cdots = \eta_\varphi^{i-1}\lambda_\varphi(q) = 0\}$$

とおく．

$r \geq 2$ のとき，A_k 型特異点は $k \geq 2$ で二つの型に分けられる．

定義 2. A_k 型特異点 p が **tangent type** であるとは，D_1 の p のまわりのある枠 $\{e_1, \ldots, e_r\}$ について

$$(e_1\lambda_\varphi(p), \ldots, e_r\lambda_\varphi(p)) = (0, \ldots, 0)$$

となるときをいう．A_k 型特異点 p が tangent type でないとき，**transvers type** とよぶ．

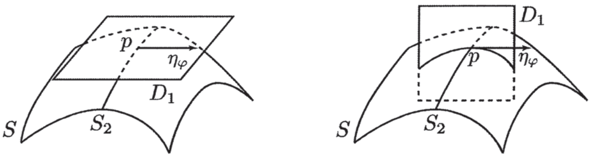

図 1　$m=3$, $r=2$ の場合の S, S_2 と, A_2 型特異点の tangent type と transverse type.

3　ジェネリックな特異点

束準同型 $\varphi\colon D_1 \to D_2$ は M 上の束準同型束 $\mathrm{Hom}(D_1, D_2)$ の切断 $\varphi \in \Gamma(\mathrm{Hom}(D_1, D_2))$ とみなすことができる. 切断の集合 $\Gamma(\mathrm{Hom}(D_1, D_2))$ を E とおく. E は M から束準同型束への写像の空間 $C^\infty(M, E)$ の部分集合であるので, Whitney C^∞ 位相の誘導位相により位相空間であるとする.

定理 3.1. $m = \dim M = 3$, $r = \operatorname{rank} D_1 = 2$ とする. このとき, 集合

$$\{\varphi \in \Gamma(\mathrm{Hom}(D_1, D_2)) \mid p \in S \text{ は } A_1\text{型}, A_2\text{型}, \text{または transverse type} A_3\text{型}\}$$

は $\Gamma(\mathrm{Hom}(D_1, D_2))$ において稠密である.

証明はベクトル束 $\Gamma(E)$ に対するジェット横断性定理を用いて行われる. $J^k(\Gamma(E))$ ですべての切断の k-ジェットを集めた $J^k(M, E)$ の部分束を表す. $j^k\colon M \to J^k(\Gamma(E))$ で k-ジェット拡張を表す.

定理 *3.1* の証明概略. 束準同型が零となるものの 3 ジェットの集合を

$$Z = \{j^3\varphi(p) \in J^3(M, E) \mid \varphi(p) = O\}$$

とおく. すると Z は局所枠の取り方によらず, 余次元 4 の閉部分多様体となる. 次に退化特異点に対応する集合を

$$D = \{j^3\varphi(p) \in J^3(M, E) \mid \lambda_\varphi(p) = 0,\ d\lambda_\varphi(p) = (0, 0, 0)\}$$

とおく. すると D すると Z は局所枠の取り方によらず, 余次元 4 の $J^3(M, E) \setminus Z$ の閉部分多様体となる.

そして次の集合 W_1, W_2, W_3 を考える:

$$
\begin{aligned}
W_1 =&\Big\{ j^3\varphi(p) \in J^3(M,E) \,\Big|\, \lambda_\varphi(p)=0,\ \eta\lambda_\varphi(p)=0, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \eta^2\lambda_\varphi(p)=0,\ \eta^3\lambda_\varphi(p)=0 \Big\}, \\
W_2 =&\Big\{ j^3\varphi(p) \in J^3(M,E) \,\Big|\, \lambda_\varphi(p)=0,\ \eta\lambda_\varphi(p)=0, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \eta^2\lambda_\varphi(p)=0,\ \operatorname{rank} d(\lambda_\varphi,\eta\lambda_\varphi)(p)=1 \Big\}, \\
W_3 =&\Big\{ j^3\varphi(p) \in J^3(M,E) \,\Big|\, \lambda_\varphi(p)=0,\ \eta\lambda_\varphi(p)=0, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \eta^2\lambda_\varphi(p)=0,\ e\lambda_\varphi(p)=0 \Big\}.
\end{aligned}
$$

ただし $\{e,\eta\}$ は D_1 の局所枠である.

集合 W_1 は η_φ による 3 階以上の λ_φ の微分が零に対応する集合, W_2 は写像 $(\lambda_\varphi,\eta_\varphi)$ が沈め込みでないことに対応する集合, W_3 は D_1 が S に接する条件に対応する集合である. これら W_1, W_2, W_3 は局所枠の取り方によらない. W_1, W_2, W_3 が $J^3(M,E)\setminus(Z\cup D)$ の余次元 4 の閉部分多様体であることを示すことで,

$$
\mathcal{O} = \{\varphi\in\Gamma(E) \,|\, j^3\varphi \text{ は } Z,\ D,\ W_1,\ W_2 \text{ と } W_3 \text{ に横断的}\}
$$

は $\Gamma(E)$ の残留集合になり, したがって稠密となる. ところで $\dim M = 3$ であるから, $j^3\varphi$ が Z, D, W_1, W_2 に横断的であるという条件は

$$
j^3\varphi(M)\cap(Z\cup D\cup W_1\cup W_2)=\emptyset
$$

と同値な条件である. したがって $\varphi\in\mathcal{O}$ は A_1 型, transvers type A_2 型, tangent type A_2 型, 及び transvers type A_3 型である. □

同様な方法によって, $(m,r)=(\dim M,\operatorname{rank} D_1)=(2,1)$, $(m,r)=(3,1)$ についても, 同様の結果が得られる.

定理 3.2. $m=\dim M=2$, $r=\operatorname{rank} D_1=1$ とする. このとき, 集合

$$
\{\varphi\in\Gamma(\mathrm{Hom}(D_1,D_2)) \,|\, p\in S \text{ は } A_1\text{型, または } A_2\text{型}\}
$$

は $\Gamma(\mathrm{Hom}(D_1,D_2))$ において稠密である.

定理 3.3. $m=\dim M=3$, $r=\operatorname{rank} D_1=1$ とする. このとき, 集合

$$
\{\varphi\in\Gamma(\mathrm{Hom}(D_1,D_2)) \,|\, p\in S \text{ は } A_1\text{型}, A_2\text{型, または } A_3\text{型}\}
$$

は $\Gamma(\mathrm{Hom}(D_1,D_2))$ において稠密である.

参考文献

[1] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 2, 491–529.

[2] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, A_k *singularities of wave fronts*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146** (2009), no. 3, 731–746.

[3] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Coherent tangent bundles and Gauss-Bonnet formulas for wave fronts*, J. Geom. Anal. **22** (2012), no. 2, 383–409.

[4] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *An index formula for a bundle homomorphism of the tangent bundle into a vector bundle of the same rank, and its applications*, J. Math. Soc. Japan **69** (2017), no. 1, 417–457.

[5] K. Saji, A. Tsuchida, *A note on singular points of bundle homomorphisms from a tangent distribution into a vector bundle of the same rank*, arXiv:1706.05777.